Université de Reims Champagne Ardenne
U.F.R. de Sciences Exactes et Naturelles

Licence MI
Info0103
2008/2009

Travaux dirigés n° 1

Systèmes (de numération) binaire, octal et hexadécimal

Système de numération

On appelle système de numération tout système permettant d'écrire les nombres.

Nous utilisons usuellement le système de numération décimal.

$2745 = 5 + 4.10 + 7.10^2 + 2.10^3$, 10 est la base du système, on utilise dix symboles pour les chiffres, la position de chaque chiffre permet de connaître son *poids* : chiffre des unités, chiffre des dizaines ... La base 10 est commode car nous avons dix doigts mais rien n'empêche d'utiliser une autre base. Les sumériens utilisaient la base 60 pour leurs calculs astronomiques et il en reste quelques traces dans nos systèmes d'unités pour le temps et les angles.

Soit B un entier strictement supérieur à 1.

Définition On pose $(b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0)_B = b_k.B^k + b_{k-1}.B^{k-1} + \cdots + b_1.B + b_0$, avec pour chaque chiffre $0 \leq b_i < B$

Exemple $(342)_5 = (97)_{10}$

Remarque $(b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0)_B = b_0 + B.(b_k b_{k-1} \cdots b_1)_B$ avec $0 \leq b_0 < B$

Autrement dit si $N = (b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0)_B$ alors b_0 est le reste de la division entière de N par B et $(b_k b_{k-1} \cdots b_1)_B$ est la représentation en base B du quotient.

Exercice 1
Compléter les tableaux suivants :

base 5	décimal
3	
31	
314	
3142	
31421	

décimal	base 5
1	
9	
45	
228	
1142	

décimal	base 8
0	
5	
42	
342	
2740	

La mémoire et le système binaire

Les mémoires d'ordinateurs sont constituées de composants électroniques pouvant prendre deux états stables. En notant 0 un de ces états et 1 le deuxième, le contenu de la mémoire est alors une suite de 0 et de 1 que l'on peut interpréter comme une représentation d'entiers en base 2, ce qui explique l'importance du système binaire en informatique. On utilisera également le système octal de base 8 et le système hexadécimal de base 16. Pour ce dernier système il est nécessaire d'introduire six chiffres supplémentaires : a, b, c, d, e, f.

Exercice 2
Exprimer $(110101)_2$ en base 10. De même pour $(456)_8$ et $(abc)_{16}$

Exercice 3
Compléter le tableau suivant :

décimal	binaire	octal	hexadécimal	décimal	binaire	octal	hexadécimal
0				8			
1				9			
⋮				⋮			
7				15			

Exercice 4
Compléter le tableau suivant :

décimal	binaire	octal	hexadécimal
1213			
542			
	10001		
	111011001		
		473	
		756	
			a2b
			123

Et les opérations ?

Dans un ordinateur, à côté de la mémoire (qui contient des entiers) il y a une deuxième unité importante : l'unité de calcul. Peut-on faire des calculs en base 2, 8 ou 16 ?

Exercice 5
Compléter les tables :

addition en octal

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
⋮								
7	7	10	11	12	13	14	15	16

multiplication en octal

∗	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
⋮								
7	0	7	16					61

Exercice 6
Effectuer les opérations suivantes :

a	b	a + b	a − b	a ∗ b
$(11011)_2$	$(1101)_2$			
$(45)_8$	$(32)_8$			
$(b2a)_{16}$	$(92)_{16}$			

Exercice 7
Le nombre total d'atomes dans l'univers est estimé à 10^{80}, combien faut-il de bits pour écrire ce nombre ?

Compléter la phrase suivante :

Dans la base ... les calculs sont faciles, mais les écritures sont longues.
Dans la base ... les écritures sont compactes mais je ne connais pas (encore) par cœur les tables.
La base ... est un compromis.

Et pour une virgule de plus ?

Définition On pose $(0.b_1 \cdots b_k)_B = \frac{b_1}{B} + \cdots + \frac{b_k}{B^k}$, avec pour chaque chiffre $0 \leq b_i < B$

Exemple $(0.412)_5 = (0.856)_{10}$

Remarque $B.(0.b_1 \cdots b_k)_B = b_1 + (0.b_2 \cdots b_k)_B$

Autrement dit si $x = (0.b_1 \cdots b_k)_B$ alors b_1 est la partie entière de$B.x$ et $(0.b_2 \cdots b_k)_B$ est la représentation en base B de la partie fractionnaire.

Exercice 8
Compléter le tableau suivant :

binaire	décimal	binaire	décimal	hexadécimal	décimal
0.1		0.11		0.a	
0.01		0.011		0.1	
0.001		0.1101		0.a1	
0.0001		0.0101		0.2b	

Exercice 9
1°) Représenter sur le segment $[0, 1[$ tous les nombres binaires de la forme : $(0.b_1b_2b_3)_2$

2°) Quel est l'écart entre deux nombres consécutifs ?

3°) Déterminer une approximation binaire sur 3 bits des décimaux : 0,1 ; 0.2 ; ... en utilisant un arrondi.

4°) De même en utilisant une troncature vers 0.

5°) Combien de bits faudrait-il utiliser pour obtenir des approximations à 10^{-6} près par exemple ?

6°) Combien de bits pour exprimer la masse de l'électron qui est de l'ordre de 10^{-30}kg ?